Produit scalaire : pour comprendre les bases

corrigé du fichier d'exercices associé à la vidéo Youtube « produit scalaire : pour comprendre les bases »

Sur la figure ci-contre, calculer les produits scalaires suivants de toutes les manières que les données vous permettent :

a) $\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC}$

b) $\overrightarrow{BG}\cdot\overrightarrow{BI}$

c) $\overrightarrow{FE}\cdot\overrightarrow{EG}$

d) $\overrightarrow{ID}\cdot\overrightarrow{IC}$

e) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{GE}$

f) $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{IA}$

g) $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{GL}$

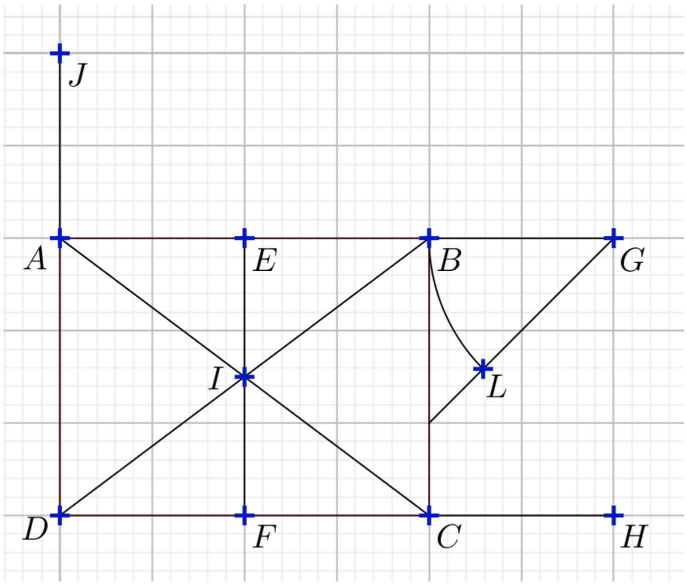

Figure 1. calculs.png $AE=2$ unités

a) $\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC}$

- par les coordonnées : $\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DB}\binom{4}{3}\cdot\overrightarrow{DC}\binom{4}{0}=16$;
- par la trigo : *l'angle $\widehat{CDB}$ est inconnu ;*
- par AlKashi : $\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC}=\frac{1}{2}(DB^2+DC^2-BC^2)=\frac{1}{2}(25+16-9)=16$;
- par projection sur (DC) : $\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC}=\overline{DC}\times\overline{DC}=4\times4=16$;
- par projection sur (DB) : *difficile de voir où C va se projeter* ;
- par Chasles : $\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC}=\left(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}\right)\cdot\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{DC}+\underbrace{\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{DC}}_{\text{nul car }\perp}=DC^2=16.$

b) $\overrightarrow{BG}\cdot\overrightarrow{BI}$

- par les coordonnées : $\overrightarrow{BG}\cdot\overrightarrow{BI}=\overrightarrow{BG}\binom{2}{0}\cdot\overrightarrow{BI}\binom{-2}{-1.5}=-4$;
- par la trigo : *l'angle $\widehat{GBI}$ est inconnu ;*
- par AlKashi : $\overrightarrow{BG}\cdot\overrightarrow{BI}=\frac{1}{2}(BG^2+BI^2-GI^2)=\frac{1}{2}(4+6.25-18.25)=-4$;
- par projection sur (BG) : $\overrightarrow{BG}\cdot\overrightarrow{BI}=\overline{BG}\times\overline{BE}=2\times(-2)=-4$;
- par projection sur (BI) : *difficile de voir où G va se projeter* ;
- par Chasles : $\overrightarrow{BG}\cdot\overrightarrow{BI}=\overrightarrow{BG}\cdot\left(\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{EI}\right)=\overrightarrow{BG}\cdot\overrightarrow{BE}+\underbrace{\overrightarrow{BG}\cdot\overrightarrow{EI}}_{\text{nul car }\perp}=-BG^2=-4.$

c) $\overrightarrow{FE}\cdot\overrightarrow{EG}$

- par les coordonnées : $\overrightarrow{FE}\cdot\overrightarrow{EG}=\overrightarrow{FE}\binom{0}{3}\cdot\overrightarrow{EG}\binom{4}{0}=0$;
- par la trigo : $\overrightarrow{FE}\cdot\overrightarrow{EG}=FE\times EG\times\cos\left(\widehat{\overrightarrow{FE},\overrightarrow{EG}}\right)=0$ car $\left(\widehat{\overrightarrow{FE},\overrightarrow{EG}}\right)=\frac{\pi}{2}$;

- par ALKASHI : $\overrightarrow{FE}\cdot\overrightarrow{EG}=\frac{1}{2}\left(FE^2+EG^2-\|\overrightarrow{FE}-\overrightarrow{EG}\|^2\right)=\frac{1}{2}(9+16-25)=0$;
- par projection sur (EG) : $\overrightarrow{FE}\cdot\overrightarrow{EG}=\overline{EE}\times\overline{EG}=0\times 4=0$;
- par projection sur (FE) : $\overrightarrow{FE}\cdot\overrightarrow{EG}=\overline{FE}\times\overline{EE}=3\times 0=0$;

d) $\overrightarrow{ID}\cdot\overrightarrow{IC}$

- par les coordonnées : $\overrightarrow{ID}\cdot\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{ID}\begin{pmatrix}-2\\-1.5\end{pmatrix}\cdot\overrightarrow{IC}\begin{pmatrix}2\\-1.5\end{pmatrix}=-4+2.25=-1.75$;
- par la trigo : *angle $\widehat{CID}$ inconnu* ;
- par ALKASHI : $\overrightarrow{ID}\cdot\overrightarrow{IC}=\frac{1}{2}(ID^2+IC^2-DC^2)=\frac{1}{2}(6.25+6.25-16)=-1.75$;
- *projections impossibles : on ne sait pas où D se projette sur (IC) et vice-versa* ;
- par CHASLES : $\overrightarrow{ID}\cdot\overrightarrow{IC}=\left(\overrightarrow{IF}+\overrightarrow{FD}\right)\cdot\left(\overrightarrow{IF}+\overrightarrow{FC}\right)=IF^2+\overrightarrow{IF}\cdot\left(\overrightarrow{FD}+\overrightarrow{FC}\right)+\overrightarrow{FD}\cdot\overrightarrow{FC}=2.25-4=-1.75$.

e) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{GE}$

- par les coordonnées : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{GE}=\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}\cdot\overrightarrow{GE}\begin{pmatrix}-4\\0\end{pmatrix}=-16$;
- par la trigo : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{GE}=AB\times GE\times\cos(\pi)=4\times 4\times(-1)=-16$;
- par ALKASHI : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{GE}=\frac{1}{2}\left(AB^2+GE^2-\|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{GE}\|^2\right)=\frac{1}{2}\left(32-\|2\overrightarrow{AB}\|^2\right)=-16$;
- projection : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{GE}=\overline{AB}\times\overline{GE}=4\times(-4)=-16$;

f) $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{IA}$

- par les coordonnées : $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{IA}=\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}0\\-3\end{pmatrix}\cdot\overrightarrow{IA}\begin{pmatrix}-2\\1.5\end{pmatrix}=-4.5$;
- par la trigo : *angle $\left(\widehat{\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{IA}}\right)$ inconnu* ;
- par ALKASHI : $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{IA}=\frac{1}{2}\left(EF^2+IA^2-\|\overrightarrow{EF}-\overrightarrow{IA}\|^2\right)$ *mais pour $\overrightarrow{EF}-\overrightarrow{IA}$ il faudrait dessin plus large ;*
- projection : $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{IA}=\overline{EF}\times\overline{IE}=3\times(-1.5)=-4.5$;

g) $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{GL}$

- par les coordonnées : $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{GL}=\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}0\\-3\end{pmatrix}\cdot\overrightarrow{GL}\begin{pmatrix}?\\?\end{pmatrix}$ *mais ici on ne connaît pas les coordonnées de L* ;
- par la trigo : $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{GL}=EF\times GL\times\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=3\times 2\times\frac{\sqrt{2}}{2}=3\sqrt{2}$;
- par ALKASHI : $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{GL}=\frac{1}{2}\left(EF^2+GL^2-\|\overrightarrow{EF}-\overrightarrow{GL}\|^2\right)$ *mais $\overrightarrow{EF}-\overrightarrow{GL}$ non évident ;*
- projection : *pas évident ici* ;
- en fait pour celui-ci, vu la configuration, seule la formule trigo permet.